

二次元拡散・三変数 Lotka-Volterra 系における 空間パターンの発生

神谷 泰史*, 浅井 哲也
北海道大学 大学院情報科学研究科 (*現所属: ヤマハ株式会社)

Abstract 二被食者-一捕食者 Lotka-Volterra モデルのダイナミクスを実現する電子回路(Asai, 2005)を二次元格子状に集積することで、拡散 Lotka-Volterra 系を模するハードウェアが構成できる。本論文では、この系の拡散不安定性解析を行い、非一様な空間パターン (ストライプやスポットパターン等) が発生する条件を推定する。

Spatial pattern formation on 2D-diffusive three-variables Lotka-Volterra system

Taishi KAMIYA* and Tetsuya ASAI
Graduate School of Information Science and Technology, Hokkaido University
(*present affiliation: *YAMAHA Corporation)

Abstract In [Asai, 2005], we fabricated analog electrical circuits for a three-variable Lotka-Volterra (LV) system that exhibits chaotic oscillations. They can easily be implemented on silicon chip because of their compact structure and low-power consumption, which implies that a large-scale 2D array of the LV system can be implemented on LSIs. Therefore, in this paper, we examine spatiotemporal properties on the array circuit to explore possible applications of the LSI.

1. Introduction

近年、群のダイナミクスが、物理学、生態学、医学、工学などの多くの研究分野において注目され、新たな発見が相次いでいる。また、応用の分野でも、反応拡散コンピューティングなどにおいて群のダイナミクスの特徴を利用したアプリケーションが提案されてきている(Adamatzky, 2005)。中でも、群のダイナミクスを記述する代表的モデルである Lotka-Volterra モデルは、古くから多くの研究者によって研究の対象とされ、また Lotka-Volterra モデルを拡散結合した「拡散 Lotka-Volterra モデル」についても幾つかの解析がなされている。例えば Kan-on らは、一次元拡散 Lotka-Volterra モデルで起こる生態間の相互作用を解析し三種の生物種の共存解を得ている(Kan-on, 1998)。また、解析はなされていないものの、二次元拡散 Lotka-Volterra モデルにおいて、反応拡散系に見られるような多様な時空間パターンの発生が確認されている(Fiasconaro, 2004)。しかし、二次元拡散 Lotka-Volterra モデルの数値シミュレーションには、多量の計算が必要である。そのため、このような系を用いた工学的アプリケーションを考えた場合、計算にかかる時間が大きな問題となる。このため、ハードウェアによる実時間処理システムの構築が今後必要になる。例えば、既に著者らが提案・試作した Lotka-Volterra oscillator 回路(Asai, 2005)を用いると、大規模な二次元拡散・三変数 Lotka-Volterra モデルをシリコン集積回路上に実現できる。本論文では、ハードウェア化が容易な二次元拡散・三変数 Lotka-Volterra 系を対象として、空間パターン発生のために必要なパラメータ条件を得るための基礎解析を行い、数値シミュレーションにより空間パターンが発生することを示す。

2. The model

本論文で対象とする二次元拡散 Lotka-Volterra 系の概要を Fig. 1 に示す。これは、著者らが既に提案・試作した二被食者-一捕食者 Lotka-Volterra モデルのダイナミクスを模する Lotka-Volterra oscillator 回路 (= cell) を二次元格子状に集積し、それらを抵抗体により拡散結合したものである。二次元格子の各交点に cell を置く。各交点上の cell をその四近傍の cell のみと結合する。それぞれの cell は、以下に示す二被食者-一捕食者 Lotka-Volterra モデル (Mimura, 1986)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= (1 - x_1 - x_2 - ky)x_1 \\ \dot{x}_2 &= (a - bx_1 - cx_2 - y)x_2 \\ \dot{y} &= (-r + \alpha kx_1 + \beta x_2)y \end{cases} \quad (1)$$

のダイナミクスを実時間で模するものである(Asai, 2005)。ここで、 $a, b, c, r, k, \alpha, \beta$ は正の値を持つパラメータ、 x_1, x_2 は共に餌場をめぐり競合し合う被食者の密度、 y は x_1, x_2 を食べる事で種を増やす捕食者の密度を表わす ($x_1, x_2, y > 0$)。この系では、 x_1, x_2, y の三種共存解はパラメータ条件によって、多周期解やカオスを呈すなど、二変数系に比べ多様な解構造が見られることが知られている(Mimura, 1986)。

二被食者-一捕食者 Lotka-Volterra モデルのダイナミクスを模する cell を二次元格子上に敷き詰め、それぞれの cell を隣り合う cell と拡散結合したときの系全体のダイナミクスを

$$\begin{cases} \frac{\partial x_1}{\partial t} &= (1 - x_1 - x_2 - ky)x_1 + D_1 \nabla^2 x_1 \\ \frac{\partial x_2}{\partial t} &= (a - bx_1 - cx_2 - y)x_2 + D_2 \nabla^2 x_2 \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= (-r + \alpha kx_1 + \beta x_2)y + D_3 \nabla^2 y \end{cases} \quad (2)$$

で表わす。ここで、 $D_{1,2,3}$ は拡散係数、 ∇^2 は二次元空間のラプラシアンである。この系において、設定するパラメータ条件によって空間パターンが発生することを示したい。しかし、上記拡散 Lotka-Volterra 系はパラメータ数が多い上、数値計算では系が平衡に至るまでに多くの時間を要するため、空間パターンが発生するパラメータ領域を探索することは容易ではない。本論文では、系が不安定になり空間パターンが発生するおおまかな条件を、拡散不安定性解析(Murray, 1989)により検討する。

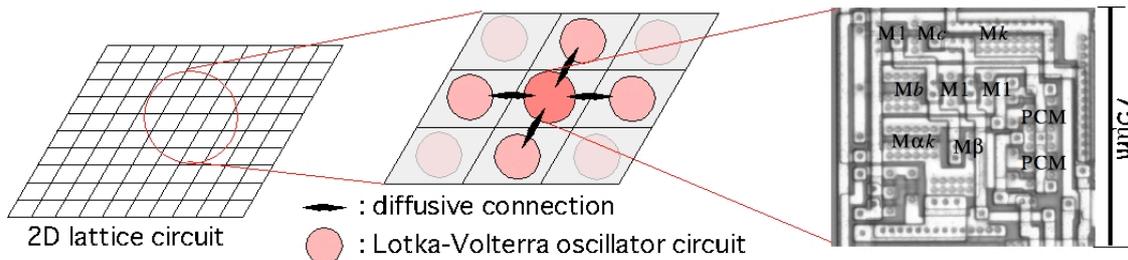


Fig. 1. Structure of diffusive Lotka-Volterra circuit

解析を行うにあたり、(2)式を Lotka-Volterra モデルの本質だけを取り出す形で簡略化し、簡略化した式での拡散不安定性解析を試みる。その後、元の拡散 Lotka-Volterra 系で、この解析の結果の妥当性を検討する。

簡略化拡散 Lotka-Volterra 系を以下のようにして構成する。まず、(1)式の各微分方程式を各変数自身で除算する。

$$\begin{cases} \frac{1}{x_1} \dot{x}_1 &= 1 - x_1 - x_2 - ky \\ \frac{1}{x_2} \dot{x}_2 &= a - bx_1 - cx_2 - y \\ \frac{1}{y} \dot{y} &= -r + \alpha kx_1 + \beta x_2 \end{cases} \quad (3)$$

すると、見かけ上右辺には乗算が含まれない変数および定数の線形和の式が現れる。ここで、 $x_1, x_2, y > 0$ の条件下で、左辺の各変数の逆数を $\tau_{1,2,3}$ と置くと、

$$\begin{cases} \tau_1 \dot{x}_1 &= 1 - x_1 - x_2 - ky \\ \tau_2 \dot{x}_2 &= a - bx_1 - cx_2 - y \\ \tau_3 \dot{y} &= -r + \alpha kx_1 + \beta x_2 \end{cases} \quad (4)$$

となる。 $\tau_{1,2,3}$ の時間変化が小さいとき、それらを定数と考えて上式の安定性解析を行うことで、 $x_1, x_2, y > 0$ の条件下での Lotka-Volterra 系の挙動を「おおまかに」知ることができる。同様にして、拡散 Lotka-Volterra 系の挙動を調べるための簡略化モデル

$$\begin{cases} \frac{\partial x_1}{\partial t} &= 1 - x_1 - x_2 - ky + D_1 \nabla^2 x_1 \\ \frac{\partial x_2}{\partial t} &= a - bx_1 - cx_2 - y + D_2 \nabla^2 x_2 \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= -r + \alpha kx_1 + \beta x_2 + D_3 \nabla^2 y \end{cases} \quad (5)$$

が得られる。以下では、この簡略化拡散 Lotka-Volterra 方程式の拡散不安定性解析を行う。具体的には、拡散の無い場での平衡点の線形安定性と、拡散のある場で平衡点が拡散に対する不安定性を調べ、二つの条件を同時に満たす時、系が不安定になり空間パターンが発生することを示す。

まず、(5)式において拡散の無い ($D_1 = D_2 = D_3 = 0$) 場合の平衡点の線形安定性を調べる。平衡点 (x_1^*, x_2^*, y^*) は、

$$\begin{aligned} (x_1^*, x_2^*, y^*) &= \left(\frac{(rc^* - \beta a^*)}{|B|}, \frac{(\alpha ka^* - rb^*)}{|B|}, \frac{\beta(a-b) + r(b-c) + \alpha k(c-a)}{|B|} \right) \\ |B| &= \alpha kc^* - \beta b^* \quad , \quad a^* = ak - 1 \quad , \quad b^* = bk - 1 \quad , \quad c^* = ck - 1 \\ &x_1^* > 0 \quad , \quad x_2^* > 0 \quad , \quad y^* > 0 \end{aligned} \quad (6)$$

である。ここで、(5)式の各変数を

$$\begin{cases} w_1 \equiv x_1 - x_1^* \\ w_2 \equiv x_2 - x_2^* \\ w_3 \equiv y - y^* \end{cases} \quad (7)$$

で置き換えると、(5)式は以下のようなになる。

$$\begin{cases} \dot{w}_1 = -w_1 - w_2 - kw_3 \\ \dot{w}_2 = -bw_1 - cw_2 - w_3 \\ \dot{w}_3 = \alpha kw_1 + \beta w_2 \end{cases} \quad (8)$$

次に、平衡点近傍での解を $\bar{w} \propto e^{\lambda t}$ (λ :固有値)と仮定し、固有値を求める。特性方程式は、

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 & -k \\ -b & -c-\lambda & -1 \\ \alpha k & \beta & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (9)$$

より、

$$\lambda^3 + (c+1)\lambda^2 + (\alpha k^2 + \beta + c - b)\lambda + \alpha k(ck - 1) + \beta(1 - bk) = 0 \quad (10)$$

である。系が線形安定であるための条件、即ち $\text{Re } \lambda_j < 0$ ($j=1,2,3$) を満たすためには、

$$\begin{aligned} \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0 \\ a_1 > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_1a_2 - a_3 > 0 \end{aligned} \quad (11)$$

であれば良いので、その条件は(10)式より

$$\begin{aligned} c+1 &> 0 \\ \alpha k(ck-1) + \beta(1-bk) &> 0 \\ (c+1)(\alpha k^2 + \beta + c - b) - \alpha k(ck-1) - \beta(1-bk) &> 0 \end{aligned} \quad (12)$$

となる。つまり、(6)式の平衡点非負の条件および(12)式の条件を同時に満たすとき、平衡点は線形安定となる。

次に、拡散のある場での空間不安定性を示す。(5)式を(6)式で示した平衡点に移動し、平衡点近傍での解を $w \propto e^{\lambda t + i\kappa r}$ (λ :固有値, κ :波数, \mathbf{r} :方向ベクトル) と仮定し、固有値を求める。特性方程式は

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda + D_1\kappa^2 & -1 & -k \\ -b & -c-\lambda + D_2\kappa^2 & -1 \\ \alpha k & \beta & -\lambda + D_3\kappa^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (13)$$

$$\lambda^3 + [c+1-(D_1+D_2+D_3)\kappa^2]\lambda^2 + \{(D_1D_2+D_2D_3+D_1D_3)\kappa^4 - [cD_1+D_2+(c+1)D_3]\kappa^2 + \alpha\kappa^2 + c + \beta - b\}\lambda - D_1D_2D_3\kappa^6 + (cD_1D_3+D_2D_3)\kappa^4 - [\beta D_1 + \alpha\kappa^2 D_2 + (c-b)D_3]\kappa^2 + c\alpha\kappa^2 + \beta - \alpha\kappa - b\beta\kappa = 0$$

である。系が空間に対して不安定であるための条件、即ち $\text{Re } \lambda_j > 0$ ($j=1 \text{ or } 2 \text{ or } 3$) を満たす条件は、

$$\begin{aligned} \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0 \\ a_1 < 0 \quad \text{or} \quad a_3 < 0 \quad \text{or} \quad a_1a_2 - a_3 < 0 \end{aligned} \quad (14)$$

であるから、そのための条件式は

$$\begin{aligned} c+1-(D_1+D_2+D_3)\kappa^2 &< 0 & (15) \\ -D_1D_2D_3\kappa^6 + (cD_1D_3+D_2D_3)\kappa^4 - [\beta D_1 + \alpha\kappa^2 D_2 + (c-b)D_3]\kappa^2 + \alpha\kappa(ck-1) + \beta(1-bk) &< 0 \\ [c+1-(D_1+D_2+D_3)\kappa^2]\{(D_1D_2+D_2D_3+D_1D_3)\kappa^4 - [cD_1+D_2+(c+1)D_3]\kappa^2 + \alpha\kappa^2 + \beta + (c-b)\} &< 0 \\ D_1D_2D_3\kappa^6 - (cD_1D_3+D_2D_3)\kappa^4 + [\beta D_1 + \alpha\kappa^2 D_2 + (c-b)D_3]\kappa^2 - \alpha\kappa(ck-1) - \beta(1-bk) &< 0 \end{aligned}$$

となる。

以上より、(15)式の条件、(6)式の平衡点非負の条件および(12)式の条件を同時に満たすとき、系が不安定になり空間パターンが発生することになる。しかし、これらの条件式を同時に満たすパラメータ条件を解析的に導き出すことは困難である。そこで数値解析を行い、上記の条件を同時に満たすパラメータを得る。数値解析では、波数 κ は十分に大きいとし、拡散係数 $D_{i(i=1,2,3)}$ は、一般的な活性-抑制系において、空間パターンの発生

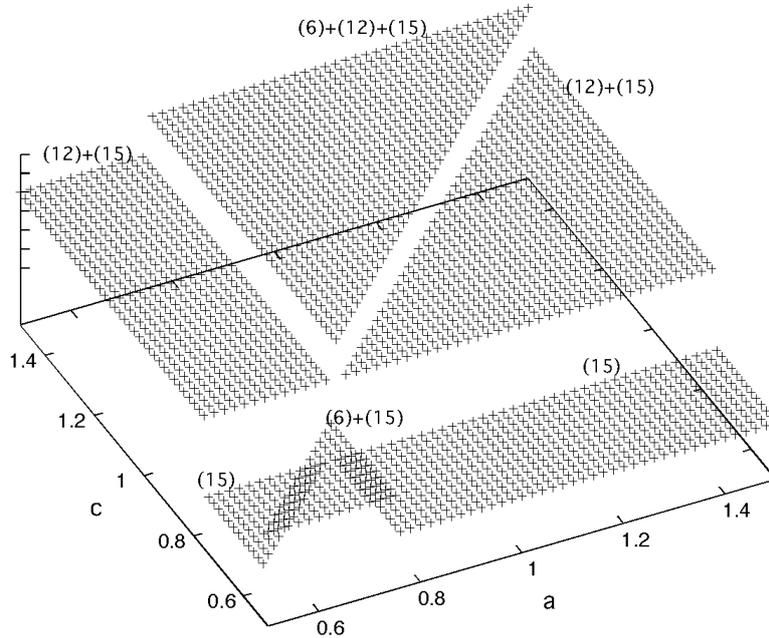


Fig. 2. Diffusion-driven instability of simplified diffusive Lotka-Volterra system $b=1, r=1, k=2, \alpha=1, \beta=1, \kappa=40, D_1=D_2=10^{-5}, D_3=10^{-3}$ における a, c のパラメータ空間での拡散不安定性解析結果

する条件となる抑制物質の拡散速度を活性物質の拡散速度よりも大きくするという条件に倣い設定した。拡散 Lotka-Volterra 系では、捕食者は被食者の増加を抑制する働きをする。そこで、捕食者の拡散係数が被食者の拡散係数に比べて十分に大きい条件を仮定した。また、簡単のため固定パラメータを整数値 $b=1, r=1, k=2, \alpha=1, \beta=1$ とし、 a と c を可変として数値計算を行った。その結果、Fig. 2 の(6)+(12)+(15)の領域で(15)式、即ち全ての拡散不安定性条件を満たすことがわかった。

3. Simulation Results

前章で得たパラメータ条件を用いて(5)式の数値計算を行った (50×50 cells の二次元格子構造、各変数の初期値は(0, 1)のランダム値、周期境界条件、cell 間隔 10^2 、時間刻み 10^3)。数値計算では、拡散により変数 x_1, x_2, y が負の値をとらないように、変数 x_1, x_2, y が負となった場合にその値を 0 にする操作を加えた。結果、拡散不安定性解析により見積もったパラメータ領域[(6)+(12)+(15)]において、Fig. 3 に示す空間パターンが発生した。図は平衡状態での x_2 の値をグレースケール表示 (0:黒->1:白) したものである。ただし、パラメータ a, c が拡散不安定性解析による条件[(6)+(12)+(15)]を全て満たせば必ず空間パターンが発生するというわけではなく、領域[(6)+(12)+(15)]とその他の領域の境界の付近で系が不安定になり始め、空間パターンが発生した。

次に、簡略化 Lotka-Volterra モデルの拡散不安定性解析により得たパラメータ条件が、元の拡散 Lotka-Volterra モデルにおいても適用可能かどうかを確認するため、簡略化拡散 Lotka-Volterra モデルで行った数値シミュレーションと同じパラメータ領域において、(2)式の拡散 Lotka-Volterra モデルの数値シミュレーションを行った (Fig. 4)。簡略化拡散 Lotka-Volterra モデルとは空間パターンのスケールが異なるものの、同様のパラメータ範囲で空間パターンが出現した。しかし、空間パターンの発生を確認できるパラメータ領域の内、拡散不安定である条件を満たす領域はごく一部であった。

Mimura は、(1)式の 2 被食者 - 1 捕食者 Lotka-Volterra モデルが、 $a=0.992, b=1.5, c=1, \alpha=0.5, \beta=0.5, k=10$ のとき、 r を変化させることで、1 周期解、2 周期解、多周期解、そしてカオスが発生するとことを示した(Mimura, 1986)。つまり、このパラメータ領域では平衡点は不安定である。一方、拡散不安定性条件を満たすためには、平衡点が安定で

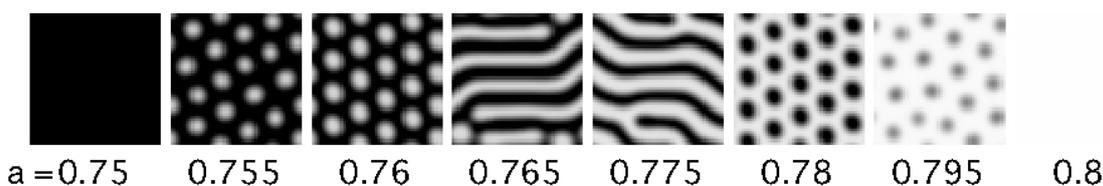


Fig. 3. Pattern formation of simplified diffusive Lotka-Volterra system
 $b = 1, c = 0.8, r = 1, k = 2, \alpha = 1, \beta = 1, D_1 = D_2 = 10^{-5}, D_3 = 10^{-3}$

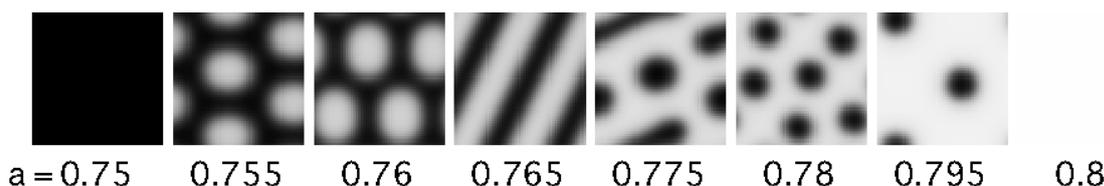


Fig. 4. Pattern formation of diffusive Lotka-Volterra system
 $b = 1, c = 0.8, r = 1, k = 2, \alpha = 1, \beta = 1, D_1 = D_2 = 10^{-5}, D_3 = 10^{-3}$

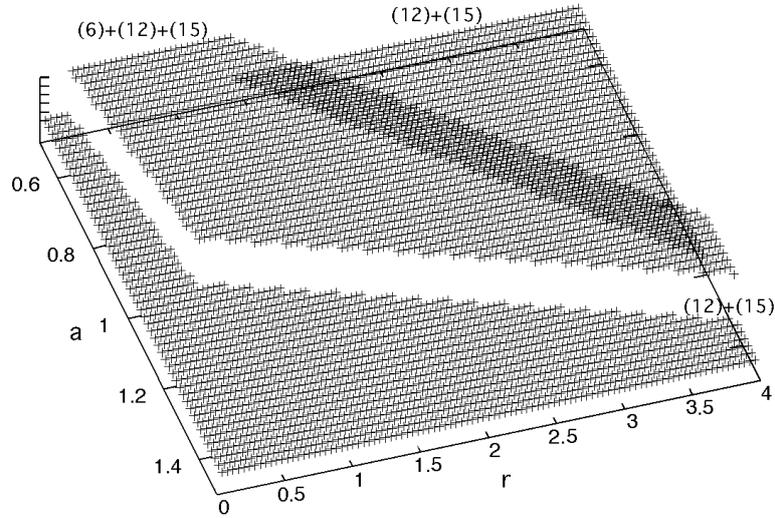


Fig. 5. Diffusion-driven instability of simplified diffusive Lotka-Volterra System
 $b = 1.5, c = 1, k = 10, \alpha = 0.5, \beta = 0.5, \kappa = 40, D_1 = D_2 = 10^{-5}, D_3 = 10^{-3}$ における a, r の
 パラメータ空間での拡散不安定性解析結果

なくてはならない。そのため、上記パラメータ領域では空間パターンの発生を確認できないように思われるが、(5)式に示した簡略化拡散 Lotka-Volterra モデルを用いて拡散不安定性解析を行うと、この領域においても空間パターンが発生する条件を満たすことがわかった(Fig. 5.)。そこで、(2)式の拡散 Lotka-Volterra モデルにおいて、このパラメータ領域での数値シミュレーションを行った結果、Fig. 6 に示すような空間パターンが発生した。このことは、単体の cell がカオス的な挙動を示すようなパラメータ条件の時、簡略化した Lotka-Volterra モデルの平衡点が安定であれば、二次元の拡散 Lotka-Volterra 系もまた複雑な空間パターンを示す可能性を示唆する。

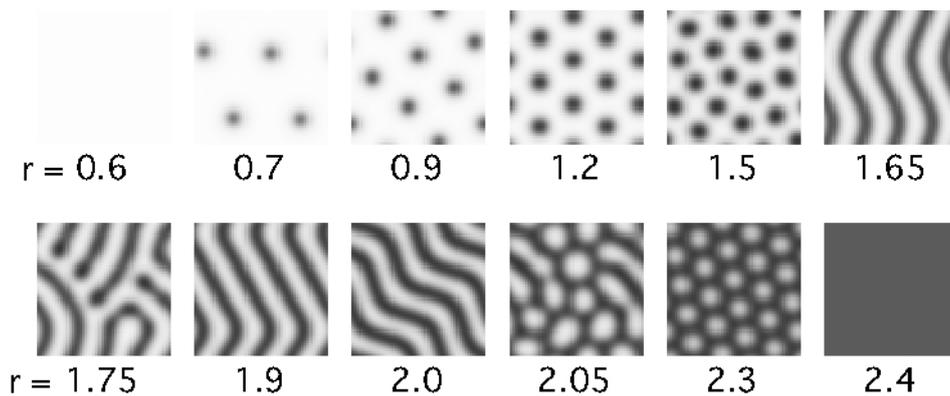


Fig. 6. Pattern formation of diffusive Lotka-Volterra system
 $a = 0.992, b = 1.5, c = 1, k = 10, \alpha = 0.5, \beta = 0.5, D_1 = D_2 = 10^{-5}, D_3 = 10^{-3}$

4. Conclusion

ハードウェア上に容易に実現可能な二次元拡散-三変数 Lotka-Volterra 系において、安定な空間パターンが出現することを示した。拡散 Lotka-Volterra 系を簡略化したモデルの拡散不安定解析を行った結果、系が不安定になり空間パターンが発生するパラメータ領域をおおまかに見積もることができた。簡略化拡散 Lotka-Volterra 系の数値シミュレーションを行い、特定のパラメータ領域で安定な空間パターンの出現を確認した。また、簡略化拡散 Lotka-Volterra 系の拡散不安定性解析により得たパラメータ条件で、拡散 Lotka-Volterra 系の数値シミュレーションを行った結果、簡略化拡散 Lotka-Volterra モデルと同様に安定な空間パターンが発生することを確認した。

REFERENCES

- Adamatzky A., De Lacy Costello B., and Asai T., Reaction-Diffusion Computers, Elsevier, UK (2005).
- Asai T., Kamiya T., Hirose T., and Amemiya Y., "A subthreshold analog MOS circuit for Lotka-Volterra chaotic oscillator," International Journal of Bifurcation and Chaos, vol. 16, no. 1, pp. 207-212 (2006).
- Fiasconard, A., Valenti, D. & Spagnolo, B. [2004] "Nonmonotonic behavior of spatiotemporal pattern formation in a noisy Lotka-Volterra system," Acta Physica Polonica B 35(4), 1491-1500.
- Kan-on, Y., Mimura, M. (1998) Singular perturbation approach to a 3-component reaction-diffusion system arising in population dynamics, SIAM Journal on Mathematical Analysis, vol. 29, no. 6, pp. 1519-1536.
- Mimura, M. & Kan-on, Y. [1986] "Predation-mediated coexistence and segregation structures," in Patterns and Waves: Qualitative Analysis of Nonlinear Differential Equations, eds. Nishida T., Mimura M. & Fujii H. (Kinokuniya, Tokyo) pp. 129-155.
- Murray J.D. (1989) *Mathematical Biology*, Springer-Verlag[3rd corrected edition 2003].